Analytische Geometrie- Übung

Das Dach eines Kirchturms soll erneuert werden. Die Vermessung des Turmdaches ergibt in einem lokalen Koordinatensystem folgende Eckpunkte: P(3 / -3 / 0) ,Q(3 / 3 / 0) , R(-3 / 3 / 0) , T(-3 -3 / 0) und die Spitze mit U(0 /0 7 6)

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E1: welche die Dreiecksfläche QRU enthält

$$P := \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Q := \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad R := \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad T := \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad U := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

E1: in Paramterform E1: $\vec{x} = \overrightarrow{OQ} + k \cdot \overrightarrow{QR} + \mathrm{i} \cdot \overrightarrow{QU}$ $\quad QR := R - Q = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad QU := U - Q = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$(1) \qquad x = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$ mitreduzierten Vektoren

Der Normalenvektor n steht senkrecht auf den beiden Richtungsvektoren QR und QU. Verschiedene Möglilchkeiten: Gleichungssystem *oder* Vektorprodukt.

$$n := QR \times QU = \begin{bmatrix} 0 \\ 36 \\ 18 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{n} := \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$0 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = d$$

Da Q in der Ebene E1: liegt, muss er dieser Gleichung genügen daher:

$$0 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = 6$$

E1: $2 \cdot x_2 + x_3 = 6$

b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Dreiecksflächen QRU Und PQU

Der Normalenvektor der Seitenfläche PQU wird analog zu a) ermittelt.

$$m := \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

nach Formel: (2) $\cos(\alpha) = \dfrac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|}$ $\quad \cos(\alpha) := \dfrac{|n \cdot m|}{\mathrm{norme}(n) \cdot \mathrm{norme}(m)} = 0{,}2$ $\quad \mathrm{acos}(0{,}2) = 78{,}463041\,°$

c) Bestimmen Sie den Neigungswinkel β der Dachkante UR gegenüber dem Dachboden (Weg wie in b)

$RU := U - R = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ Dachbodengerade: $RP := P - R = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\cos(\beta) := \frac{|RU \cdot RP|}{\mathrm{norme}(RU) \cdot \mathrm{norme}(RP)} = 0{,}5773503 \qquad \mathrm{acos}(0{,}5773503) = 54{,}7356082\,°$$

PS.: in der offiziellen Lösung ist der Rechnungsweg zu aufwändig

d) Zur Verstärkung des Dachstuhl werden Stäbe eingezogen: Stab b_1 : Mitte PT lotrecht zur Dachfläche QRU

$$M := P + \frac{1}{2} \cdot (T - P) = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{M}(0\ /\ -3\ /0\ )$$

Ein Gerade durch M mit dem Lotvektor aus a) Schneidet die Ebene E1 im Durchstoßpunkt D g: $x = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + r \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ Somit muss für den Durchstoßpunkt D gelten g: = E1:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + r \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

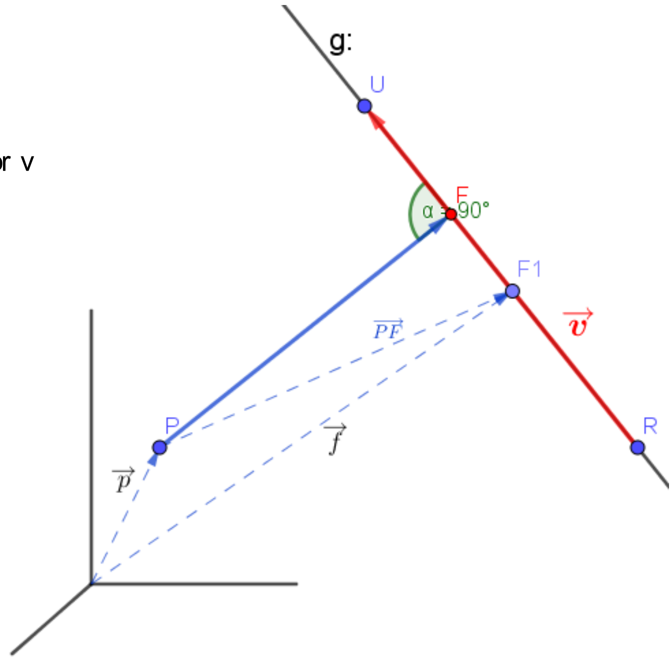
$$-s + t = 3$$
$$2 \cdot r + t = 6$$
$$r - 2 \cdot t = 0$$

$$L := \mathrm{Solve}\left(\begin{bmatrix} -s+t=3 \\ 2 \cdot r + t = 6 \\ r - 2 \cdot t = 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} \right) = \begin{cases} r = \frac{12}{5} \\ s = -\frac{9}{5} \\ t = \frac{6}{5} \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{12}{5} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,8 \\ 2,4 \end{bmatrix} \quad D := \begin{bmatrix} 0 \\ 1,8 \\ 2,4 \end{bmatrix} \quad D - M = \begin{bmatrix} 0 \\ 4,8 \\ 2,4 \end{bmatrix}$$

$$b1 := \mathrm{norme}(D - M) = 5,3665631$$

d2) Die Dachkante RU soll von P aus gestützt werden. $RU = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$g: \quad x = R + t \cdot RU \quad \Rightarrow \quad x = \underset{\vec{R}}{\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}} + t \cdot \underset{\vec{v}}{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}$$



folgende Überlegung: PF steht orthogonal auf g: mit Richtungsvektor v und F liegt in der Geraden g:

$$\left(\vec{g} - \vec{p}\right) \cdot \vec{v} = 0$$

$$\left(\underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{g:} - \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{p}} \right) \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\vec{v}} = 0$$

$$(-3 + t - 3) \cdot 1 + (3 - t + 3) \cdot (-1) + 2 \cdot t \cdot 2 = 0$$

$$t = 2$$

Einsetzen in g: F(-1/1/4) $F := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$P - F = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \mathrm{norme}(P - F) = 6,9282032$$

e) Pro m² Seitenfläche werden 12 Ziegel benötigt. Bestimmen Sie die Menge der Ziegel für die Dacheindeckung

Grundseite der Dreiecksfläche $s := \mathrm{norme}(R - Q) = 6$

Dreieckshöhe $h := \sqrt{6^2 + 3^2} = 6,7082039$

$$A_D := \frac{s \cdot h}{2} = 20,1246118$$

$$Steine := A_D \cdot 4 \cdot 12 = 965,9813663 \qquad 966 \ Steine$$

In der offiziellen Lösung viel zu aufwändig gelöst

f) In die Dachfläche QRU ist eine Dachluke senkrecht über dem Punkt A(0 / 2 / 0) eingefügt. Bestimmen sie die Höhe der Mitte der Dachluke

$A := \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ Normale des Dachbodens: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ g2: $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + r \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Durchstoßpunkt S: $g = E1$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + r \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$0 = 3 + s - t$$
$$2 = 3 - t$$
$$r = 2 \cdot t$$

t=1 , r=2 r in g2: einsetzen:

$S := \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ $l_{AS} := \text{norme}(A - S) = 2$